МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

УТВЕРЖДЕНО

Ученым советом
механико-математического факультета
протокол № 4 от 18 марта 2014 г.

Программа вступительных испытаний в аспирантуру по направленности «Математическая логика, алгебра и теория чисел» (01.01.06)

Нижний Новгород, 2014

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Аналитическая геометрия

Векторная алгебра. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, прямые на плоскости, плоскости и прямые в пространстве. Основные кривые и поверхности второго порядка. Классификация кривых второго порядка.

Алгебра

Кольца и поля. Поле комплексных чисел. Многочлены и их корни. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида, свойство факториальности кольца многочленов над полем. Теорема Безу, кратность корня, основная теорема алгебры (без доказательства), корни многочленов с вещественными коэффициентами, теорема Штурма. Многочлены от нескольких неизвестных. Симметрические многочлены.

Алгебра матриц. Группа подстановок n-й степени. Определители. Правило Крамера. Действия над матрицами, обратная матрица.

Векторные пространства, системы линейных алгебраических уравнений. Линейная зависимость систем векторов, ранг матрицы, критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений, связь между решениями неоднородной и однородной систем, фундаментальная система решений. Билинейные и квадратичные формы и их матрицы, теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции вещественных квадратичных форм.

Линейные операторы и их матрицы. Собственные векторы и собственные значения. Сопряженный оператор. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Самосопряженные, ортогональные и унитарные операторы и их свойства. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Элементы теории групп. Группы, подгруппы, циклические группы, теорема Лагранжа. Факторгруппа, основная теорема о гомоморфизмах. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Теоремы Силова. Свободные группы. Задание группы образующими и определяющими соотношениями. Свободные абелевы группы. Классификация конечных и конечнопорожденных абелевых групп. Основы теории представлений групп.

Дискретная математика и математическая логика

Элементы теории множеств. Операции над множествами, мощность множеств, теорема Шредера-Бернштейна. Счетные множества, теорема Кантора, мощность континуум.

Алгебра высказываний. Формулы логики высказываний, совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), двойственность в алгебре высказываний. Булевы функции, список булевых функций от двух переменных, понятия замкнутости и полноты функционального класса, полиномы Жегалкина, классы Поста.

Теория чисел

Свойства простых и составных чисел. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.

Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

Сравнения. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Закон взаимности Гаусса. Цепные дроби. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. Первообразные корни и индексы.

Характеры. L-функции Дирихле. Простые числа в арифметических прогрессиях.

Алгебраические числа.

Дифференциальная геометрия и топология

Способы задания гладкой кривой. Определения и геометрический смысл кривизны и кручения гладкой кривой. Формулы Френе.

Гладкие поверхности. Теоремы о неявном и параметрическом задании гладкой поверхности. Касательная плоскость. Нормаль. Первая квадратичная форма поверхности и ее применения, в том числе к нахождению площади поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема о кривизне кривой на поверхности. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении. Теорема Менье. Формула Эйлера. Асимптотические линии поверхности. Главные кривизны и главные направления в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Понятие о внутренней геометрии поверхности. Теорема Гаусса. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена, символы Кристоффеля. Теорема Бонне. Абсолютный дифференциал векторного поля вдоль кривой. Параллельный перенос векторного поля вдоль кривой и его свойства. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности и их свойства. Теорема Клеро. Геодезические линии на сфере.

Гладкие многообразия и гладкие отображения. Примеры: гладкие поверхности, матричные группы, проективное пространство. Многообразие с краем. Касательный вектор, касательное пространство к многообразию, векторные и тензорные поля на многообразии. Риманова метрика.

Топологические пространства и подпространства. Базы, критерии базы в пространстве и в множестве. Метрические топологии. Классификация точек относительно подмножества. Непрерывные отображения, гомеоморфизмы, понятие топологических инвариантов. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Аксиомы счетности, сепарабельность. Компактность пространства и подмножества. Теорема о замкнутом подмножестве компакта. Замкнутость компакта в хаусдорфовом пространстве. Сохранение компактности при непрерывных отображениях. Критерий компактности в арифметическом пространстве. Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компактном пространстве. Произведение топологических пространств. Сохранение хаусдорфовости, связности, линейной связности и аксиом счетности при умножении топологических пространств. Компактность произведения компактных пространств. Фактор-топология, фактор-пространство.

Топологические многообразия. Классификация одномерных топологических многообразий. Представление поверхности правильным семейством многоугольников. Эйлерова характеристика поверхности и ее топологическая инвариантность. Ориентируемость поверхности. Канонические многоугольники и канонические поверхности. Классификация двумерных замкнутых многообразий.

Математический анализ

Предел и непрерывность функции одной переменной. Производная. Дифференциал. Дифференциальные теоремы о среднем. Формула Тейлора. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Понятия первообразной и неопределенного интеграла. Теорема о существовании первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интегрируемости по Риману функции, непрерывной на отрезке.

Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Степенные ряды.

Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.

Ряды Фурье. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-гладкой функции. Терема о порядке малости коэффициентов Фурье.

Комплексный анализ

Дифференцируемость функции комплексного переменного и условия Коши-Римана. Функции аналитические и гармонические. Необходимые и достаточные условия аналитичности функции в области. Связь аналитических и гармонических функций

Интегральные теоремы и формула Коши. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интеграл Коши для односвязной и многосвязной областей.

Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты и их применение. Теорема о разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки. Формула вычисления вычета в полюсе, основная теорема теории вычетов.

Функциональный анализ

Измеримые функции. Интеграл Лебега. Действия над измеримыми функциями. Теорема Егорова. Теоремы Лебега, Леви и (лемма) Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Непрерывные линейные функционалы. Линейные операторы. Линейные функционалы на нормированных пространствах, теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве, спектр оператора, резольвента

Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, их решения. Постановка задачи Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка (формулировки и смысл). Примеры нарушения единственности. Теорема о продолжении решений.

Общая теория линейных уравнений. Определитель Вронского, формула Лиувилля-Остроградского. Фундаментальная система решений однородного уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Классификация фазовых портретов.

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру.Ч. III. Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань , 2006.
5. Верещагин Н.К., Шень А. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999.
6. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002.
7. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.: Энас, 2003.
8. Виноградов И.М. Основы теории чисел. СПб.: Лань, 2004.
9. Бухштаб А.А. «Теория чисел», М: Просвещение.- 1966г.
10. Нестеренко Ю.В. «Теория чисел», изд. Академия, 2008г.
11. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. «Теория чисел», Любое издание.
12. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: «Мир», 1972.
13. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Наука.- 1987.
14. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии.- Ижевск: Институт компьютерных исследований.- 2002.
15. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТГИЗ, 2004.
16. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М.: УРСС, 2003.
17. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.: Наука. - 1977.
18. Гудков Д.А. Начала топологии. Метод. разработка. Ч.1-8.- Горький: Изд. ГГУ.- 1981-1984.
19. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ, ч.1,2, М.: Изд. МГУ, 1987.
20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1,2., М.:Высшая школа, 1982; М.: Alfa, 1998.
21. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
22. Свешников А.Г., Тихонов А.М. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1999.
23. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009.
24. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
25. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
26. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
27. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.
28. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.